* B F - 5 3 2 2 *

# BF-5322

Seat No.________

## Third Year B. Sc. Examination

**May / June – 2014**

## Mathematics : Paper - IX

***(Mechanics)* (યંત્રશાસ્ત્ર)**

Time : 3 Hours] [Total Marks : **105**

**સૂચના :** (૧) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ પાંચ પ્રશ્નો છે.

(૨) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

(૩) જમણી બાજુના અંક સંબંધિત પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

૧ (અ) લામીનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૭

(બ) જો બિંદુ O એ $\Delta ABC$ નું અંતઃકેન્દ્ર હોય અને $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ અને $\overrightarrow{OC}$ ની દિશામાં કાર્ય કરતાં બળો $P, Q$ અને $R$ સંસ્થિતિમાં હોય તો સાબિત કરો કે ૭

$$\frac{P}{\cos A/2} = \frac{Q}{\cos B/2} = \frac{R}{\cos C/2}$$

(ક) બે બળો એકબીજાને કાટખૂણે કાર્ય કરે છે ત્યારે પરિણામી બળ $\sqrt{14}$ છે. પણ જો તે $120°$ નાં ખૂણે કાર્ય કરે છે ત્યારે પરિણામી બળ $\sqrt{13}$ છે. તો તે બળોનું માન મેળવો. ૭

**અથવા**

૧ (અ) $P$ અને $Q$ મહત્ત્વનાં બે બળો એકબીજા સાથે $\theta$ ખૂણે રહી કાર્ય કરે તેમજ તેમના પરિણામી બળ $\overline{R}$ અને $\overline{P}$ વચ્ચેનો ખૂણો $\alpha$ હોય, તો સાબિત કરો કે ૭

(૧) $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

(૨) $\tan\alpha = \dfrac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$

જ્યાં $P = \left|\overline{P}\right|, Q = \left|\overline{Q}\right|, R = \left|\overline{R}\right|$

(બ) સમક્ષિતિજ સાથે $\alpha$ ખૂણો બનાવતા ઢોળાવ પરનું બળ $p$ એ $W$ વજનનાં કણને સ્થિર રાખે છે. જો આ બળ ક્ષૈતિજ દિશામાં લગાડવામાં આવે તો $W'$ વજનનાં કણને સ્થિર રાખે છે. તો સાબિત કરો કે $P^2 + W'^2 = W^2$. ૭

(ક) 2b લંબાઈનો એક હળવો દંડ, જેના છેડાઓ $w, W$ વજનનાં બે ભારે કણો લટકાયેલા છે. તે $a$ ત્રિજ્યાવાળા લીસા અર્ધગોળાકાર પ્યાલામાં મૂકેલ છે કે જેની કિનાર ક્ષૈતિજ છે જો $w$ વજનનો કણ પ્યાલાનાં કોરની તરત જ નીચે રહેતો હોય, તો સાબિત કરો કે $wa^2 = W\left(2b^2 - a^2\right)$. ૭

૨ (અ) પોતાના વજન હેઠળ મુક્ત રીતે લટકતાં સમાંગ કેબલ વડે રચાતા વક્રનું કાર્ટેઝીયન સમીકરણ મેળવો. ૭

(બ) 10 સે.મી. ત્રિજ્યાવાળા એક ગોલકમાંથી 3 સે.મી. ત્રિજ્યાવાળો એક નાનો ગોલક કાપી લીધો છે. તેમના કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર 5 સે.મી. છે. તો બાકીના ઘનનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર શોધો. ૭

(ક) આપેલી લંબાઈની એક સમાંગ સીડીનાં સમતુલન માટે નાનામાં નાનો ખૂણો નક્કી કરો. બધી સપાટીઓ માટે ઘર્ષણાંક $\mu$ છે. ૭

અથવા

૨ (અ) કણ સંહતિના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની વ્યાખ્યા આપો. અને તે અનન્ય રીતે અસ્તિત્વ ધરાવે છે. તેમ સાબિત કરો. ૭

(બ) અંત વગરની એક દોરી $a$ ત્રિજ્યાની એક ગોળાકાર ગરગડી ઉપર એવી રીતે લટકે છે જેથી ગરગડીનાં પરિઘનો 2/3 ભાગ દોરીનાં સંપર્કમાં રહે છે તો સાબિત કરો કે દોરીની ૭

લંબાઈ $a\left[\dfrac{3}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}+\dfrac{4\pi}{3}\right]$ છે.

(ક) 540 પાઉન્ડનું એક વજન 3 એકમ ત્રિજ્યાનાં એક ખરબચડા નળાકારની આસપાસ વીંટળાયેલ હળવા દોરડાની મદદથી 9 પાઉન્ડ વજનનાં બળથી ટેકવેલું છે. જો દોરડાં અને નળાકારની વચ્ચે ઘર્ષણાંક 0.43 હોય, તો નળાકારને સ્પર્શતા દોરડાની લંબાઈ શોધો. ૭

૩ (અ) સમતલીય વક્રમાં ગતિ કરતાં વેગ અને પ્રવેગનાં સ્પર્શીય અને અભિલંબ ઘટકો મેળવો. ૭

(બ) એક કણ ગતિમાર્ગ $r = ae^{\theta}$ પર એવી રીતે ગતિ કરે છે કે તેનાં પ્રવેગનો અરીય ઘટક ગતિમાર્ગનાં દરેક બિંદુએ શૂન્ય થાય. ૭

સાબિત કરો કે $\dfrac{d\theta}{dt}$ હંમેશા અચળ છે તથા કણનાં વેગનાં માન અને પ્રવેગનાં માન બંને $r$ નાં સમપ્રમાણમાં હોય છે.

(ક) સમક્ષિતિજ 10 ફૂટ ઊંચાઈનાં એક બોગદામાં 80 ફૂટ/સેકન્ડનાં વેગથી એક પથ્થર ફેંકવામાં આવે છે. તો તેણે મેળવેલ મહત્તમ અંતર અને તે મેળવવામાં લાગતો સમય મેળવો. ૭

**અથવા**

૩ (અ) ક્ષૈતિજ સાથે $\alpha$ ખૂણો બનાવતાં માર્ગ પર એક કણને $v$ વેગથી ફેંકવામાં આવે છે. તો કણનાં (૧) ક્ષૈતિજ વિસ્તાર (૨) ઉડ્ડયન સમય (૩) મહત્તમ ઊંચાઈનાં સૂત્રો મેળવો. ૭

(બ) સપાટ મેદાનથી $h$ ઊંચાઈએ આવેલી એક ટેકરી પર એક તોપ ગોઠવેલી છે. જો હવાનો અવરોધ અવગણવામાં આવે તો બતાવો કે પ્રક્ષિપ્તને આપેલા વેગ $v$ માટે વધારેમાં વધારે ક્ષૈતિજ અંતર $\operatorname{cosec}^2\theta = 2\left(1+\frac{gh}{v^2}\right)$થી અપાયેલ $\theta$ કોણે પ્રક્ષિપ્ત કરવાથી મેળવાય છે. ૭

(ક) જો પ્રક્ષિપ્તને તેના ગતિ માર્ગના કોઇ બિંદુ $P$ સુધી પહોંચતા $t_1$ સમય અને $P$ બિંદુથી ક્ષૈતિજ સમતલ સુધી પહોંચતા $t_2$ સમય લાગે, તો સાબિત કરો કે ક્ષિતિજથી $P$ બિંદુની ઊંચાઈ $\frac{1}{2}g\,t_1\,t_2$ છે. જ્યાં $g$ ગુરુત્વાકર્ષણીય પ્રવેગ છે. ૭

૪ (અ) કેન્દ્રીય ગતિ પથનું વિકલ સમીકરણ ૭

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2(E-V)}{h^2}$$ સ્વરૂપમાં મેળવો.

(બ) એક કણની કેન્દ્રિય કક્ષા $r^2 = a^2\cos 2\theta$ છે. ($a$ અચળ છે) તેનું બળકેન્દ્ર ધ્રુવ છે. સાબિત કરો કે બળનો નિયમ $r^7$ નાં વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે. ૭

(ક) એક કણ સાદી સ્વરીત ગતિ કરે છે. આ ગતિમાં કણની બે જુદી જુદી સ્થિતિ માટે વેગ $u$ અને $v$ તેમજ પ્રવેગ $\alpha$ અને $\beta$ છે. તો સાબિત કરો કે બે સ્થિતિ વચ્ચેનું અંતર $\frac{v^2-u^2}{\alpha+\beta}$ છે. ૭

**અથવા**

૪ (અ) સાદી સ્વરીત ગતિ વ્યાખ્યાયિત કરો, અને તેનું સમીકરણ ૭

$x = a\cos\left(\sqrt{\mu}\, t\right)$ સ્વરૂપમાં મેળવો. તેનો આવર્તકાળ મેળવો.

(બ) $\left(\frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^4}\right)$ ના બળથી આકર્ષાતા એક કેન્દ્રિય બળને આધીન ૭

એક કણ ગતિમાન છે, જ્યાં $b$ અને $c$ ધન અચળો છે અને $r$ કેન્દ્રથી અંતર છે. કણ $a$ ત્રિજ્યાની વૃત્તિય કક્ષામાં ફરે છે.

સાબિત કરો કે જો $a^2 b > c$ હોય તો અને તો જ ગતિ સ્થાયી છે.

(ક) $m$ દ્રવ્યમાન અને $r$ ત્રિજ્યાવાળા એકરૂપ ઘન ગોલકનું તેના વ્યાસને સાપેક્ષ જડત્વભ્રામક શોધો. ૭

૫ (અ) સમાન દ્રવ્યમાનવાળા બે ગોલક માટે સાબિત કરો કે જો સંપૂર્ણ સ્થિતિ સ્થાપકતાં ધારવામાં આવે, તો અથડામણ પછી તેમનાં વેગોની અદલાબદલી થાય છે. ૭

(બ) 4 ફૂટ/સેકન્ડના વેગથી ગતિ કરતો 8 પાઉન્ડ વજનનો દડો તેની વિરુદ્ધ દિશામાં 9 ફૂટ/સેકન્ડનાં વેગથી ગતિ કરતાં 12 પાઉન્ડનાં દડા સાથે અથડાય છે. તો સંઘાત પછીનાં તેમના વેગ ૭

શોધો. અને ગતિકી ઊર્જામાં થતો ઘટાડો શોધો. જ્યાં $e = \frac{1}{5}$ છે.

(ક) $m$ દ્રવ્યમાન અને $r$ ત્રિજ્યાવાળો ઘન નળાકાર $\alpha$ ખૂણે નમેલા ઢાળ ઉપર ગબડે છે. સાબિત કરો કે તેનો વેગ ૭

$\frac{2}{3} g \sin\alpha$ છે.

**અથવા**

૫ (અ) પદાર્થના જડત્વ ભ્રામક માટેનાં સમાંતર અક્ષોનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૭

(બ) એક સરખા દ્રવ્યમાનનાં બે દડાઓ એક સીધી રેખામાં સ્થિર છે. જો એકને બીજા તરફ $u$ વેગથી ગબડાવવામાં આવે તો સાબિત કરો કે સંઘાતને લીધે ગતિશક્તિમાં થતો ઘટાડો ૭

$\frac{1}{4}mu^2\left(1-e^2\right)$ છે જ્યાં $e$ પ્રત્યાવસ્થાનાંક છે.

(ક) $m_1$ અને $m_2$ દ્રવ્યમાનનાં બે લીસા ગોલકો અનુક્રમે $u$ અને $v$ વેગથી પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે. તે બંને સીધી રેખામાં અથડાય છે. અને $m_2$ દ્રવ્યમાનનો ગોલક અથડામણ બાદ સ્થિર થઈ જાય છે. સાબિત કરો કે ૭

$$v\left(m_2-em_1\right)=m_1(1+e)u$$

## ENGLISH VERSION

**Instructions :** (1) This question paper contains five questions.
(2) All questions are compulsory.
(3) Figures to the right indicate marks of the corresponding questions.

1 (a) State and prove Lami's theorem. 7

(b) Point O is the incentre of a triangle $ABC$, three forces $P, Q, R$ act on the direction $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ and $\overrightarrow{OC}$ respectiely. If the system is in equilibrium then prove that 7

$$\frac{P}{\cos A/2}=\frac{Q}{\cos B/2}=\frac{R}{\cos C/2}$$

(c) Find the magnitude of the two forces, such that if they are at right angle, their resultant is $\sqrt{14}$, but if they act at 120°, their resultant is $\sqrt{13}$. **7**

**OR**

1 (a) If two forces of magnitudes $P$ and $Q$ are acting at an anle $\theta$ to each other and the angle between the forces $\bar{P}$ and resultant $\bar{R}$ is $\alpha$ then prove that : **7**

(1) $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

(2) $\tan\alpha = \dfrac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$

where $P = \left|\bar{P}\right|, Q = \left|\bar{Q}\right|, R = \left|\bar{R}\right|$

(b) Force $P$ keep the particle of weight $W$ in equilibrium which is lying on an inclined plane at an angle $\alpha$. If the force act in a horizontal direction, then it will keep the particle of weight $W'$ in equilibrium then prove that $P^2 + W'^2 = W^2$. **7**

(c) A light rigid rod of length 2b terminated by heavy particles of weight $w$ and $W$ is placed inside a smooth hemispherical bowl of radius $a$, which is fixed with its rim horizontal. If the particle of weight $W$ rests just below the rim of the bowl, prove that $wa^2 = W\left(2b^2 - a^2\right)$. **7**

2 (a) Find the Cartesian equation of a curve in which a uniform cable hangs freely under its own weight. **7**

(b) A sphere of radius 3 cm. is cut of from a larger sphere of radius 10 cm., the distance between their centres is 5 cm. Locate the mass centre of the remaining volume. **7**

(c) Determine the smallest angle for the equilibrium of a homogeneous ladder of a given length, the coefficient of friction of all surfaces being $\mu$. **7**

**OR**

2 (a) Define the mass centre of a system of particles and prove that it unique exist. **7**

(b) Show that the length of an endless chain which will hang over a circular pully of radius *a*, so as to be contect with 2/3 of the circumference of the pully is **7**

$$a\left[\frac{3}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}+\frac{4\pi}{3}\right].$$

(c) A load of 540 lbs. is just supported with the aid of a light rope wrapped round a rough cylindrical shaft of radius 3 inches by a force 9 lbs. wt. If the coefficient of friction between the rope and the shaft is 0.43, calculate the length of the rope in contact with the shaft. **7**

3 (a) Find the tangential and normal components of velocity and acceleration of a particle moving along a plane curve. **7**

(b) A particle is moving alone the path $r = ae^{\theta}$ in such a way so that the radical component of is acceleration is always zero. Prove that $\frac{d\theta}{dt}$ is always constant and that magnitude of its velocity and magnitude of its acceleration are proportional to $r$. **7**

(c) Find the greatest distance that a stone can be thrown inside a horizontal tunnel 10 ft. hight with velocity of projection 80 ft/sec. Find also the corresponding time for that. **7**

**OR**

3 (a) A particle is projected with velocity $v$ and making an angle $\alpha$ with horizontal : **7**
Find the expression for
(i) The horizontal range
(ii) The time of flight
(iii) The maximum height obtained by the particle.

(b) A gun is mounted on a hill of height $h$ above a level plane. Show that, if the resistance of the air is neglected, the greatest horizontal range for given muzzle velocity $v$ is obtained by firing at an angle of elevation $\theta$ such that **7**

$$\operatorname{cosec}^2 \theta = 2\left(1 + \frac{gh}{v^2}\right).$$

(c) If a projectile takes time $t_1$ to reach at point $p$ on its path and takes $t_2$ time to reach from point $p$ to horizontal plane. Then prove that the height of point $p$, from horizontal plane is $\frac{1}{2} g t_1 t_2$. **7**

4 (a) Obtain in usual notations. The differential equation of a central orbit in the form **7**

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2(E-V)}{h^2}.$$

(b) A particle describes the central orbit $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ($a$ is constant), the centre of force being a pole. show that the law of force varies inversely as $r^7$. **7**

(c) A particle is moving in a simple harmonic motion. In this motion, particle takes velocity $u$ and $v$ and acceleration $\alpha$ and $\beta$ for different positions respectively. Prove that distance between two positions is $\frac{v^2 - u^2}{\alpha + \beta}$. **7**

**OR**

4 (a) Define simple harmonic motion and obtain its equation in the form $x = a\cos\left(\sqrt{\mu}\, t\right)$. Obtain its periodic time. **7**

(b) A particle moves in a circular orbit of radius $a$ under the central force $\left(\frac{b}{r^2}+\frac{c}{r^4}\right)$, where $b$ and $c$ are positive constants and $r$ is the distance of the particle from the centre. Prove that orbit is stable if and only if $a^2 b > c$. **7**

(c) Find the moment of inertia of a uniform solid sphere of mass $m$ and radius $r$ about its diameter. **7**

5 (a) For the two sphere of the same mass, prove that their velocities are exchanged after collision if perfect elasticity is assumed. **7**

(b) A solid sphere of mass 8 lb. and velocity 4 ft/sec. collides with other solid sphere of mass 12 lb and 9 ft/sec. in opposite direction. Find their velocity after collision and loss in kinetic energy, where $e = 1/5$. **7**

(c) A solid cylinder of radius $r$ and mass $m$ rolles down on inclined plane of inclination $\alpha$. Prove that its acceleration is $\frac{2}{3} g \sin\alpha$. **7**

**OR**

5 (a) State and prove the theorem of parallel axes for the moment of inertia of a rigid body. **7**

(b) Two balls of equal mass $m$ are at rest on a straight line. If one ball is thrown to another ball with velocity $u$, then prove that the loss of kinetic energy during collision is $\frac{1}{4}mu^2\left(1-e^2\right)$ where $e$ is the coefficient of restitution. **7**

(c) Two smooth sphere of mass $m_1$ and $m_2$ moving with velocity $u$ and $v$ in the opposite direction, collide in the straight line. If sphere of mass $m$ is brought to rest by the impact than prove that $v\left(m_2-em_1\right)=m_2\left(1+e\right)u$. **7**

---